УДК. 550.831

Ю.І. Дубовенко

ДЕЯКІ АНАЛІТИЧНІ АПРОКСИМАЦІЇ ДЛЯ НАБЛИЖЕНОГО ВИЗНАЧЕННЯ КОНТАКТУ

Вказано спосіб заміни нелінійної контактної задачі гравіметрії на лінійну. Подано аналітичний вираз для її розв'язання з прийнятною точністю. Виявлено, що відомі аналітичні конструкції для обчислення густинних контактів є його частинними випадками. Наводяться ряд ітераційних поправок для уточнення наближень, які є аналітичними апроксимаціями шуканого контакту. Вказана міра уточнення цих наближень.

Ключові слова: гравіметрія; обернена задача; аналітична апроксимація; клас Нумерова; початкове наближення контакту; лінійна контактна задача; ітераційна поправка; чисельна модель.

Вступ. У процесі становлення нової парадигми в теорії інтерпретації потенціальних полів [Страхов, 2001] актуальною залишається розробка нового математичного апарату для моделювання потенціальних геофізичних полів, який був би адекватним сучасній геофізичній практиці. Про адекватні вимоги до нового математичного діалекту геофізичного моделювання та ключову роль аналітичних апроксимацій геологічного середовища і геофізичного поля сказано в роботах Страхова, зокрема [Страхов, 2007]. Продовжуючи наявні розробки у цій сфері, пропонуємо нові аналітичні апроксимації для горизонтально-шаруватого геологічного середовища, що мають місце в рамках підкласу відомого класу контактних поверхонь Страхова.

До постановки проблеми. Розв'язок $\zeta(x)$ *нелінійної* оберненої задачі потенціалу для контактної поверхні [Нумеров, 1930] на класі Нумерова $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ меж $\zeta(x)$ поділу однорідних середовищ з високою точністю можна замінити на *лінійне* рівняння, яке характеризує аналітичне продовження вертикальної складової напруженості поля $u(x)$ до тяжіючих мас на *середню глибину* $h=\zeta(x)$ [Старостенко и др., 1988]:

$$u(x)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+\zeta^2(\xi)}{(\xi-x)^2+\zeta^2(x)}d\xi=\zeta(x) \quad (1)$$

$$\approx\zeta(x;h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}[u(\xi)-h]d\xi .$$

Аналізуючи фізичну суть процедури (1) при обмеженнях, які властиві саме класу $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$, після ряду перетворень отримуємо таке лінеаризоване наближення

$$\zeta(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\times$$
$$\times[u(\xi,h)-u(x,h)]d\xi . \quad (2)$$

Вираз (2) апроксимує розв'язок задачі з точністю до квадрата різниці значень поля $h^{-2}\left(h^{+}-h^{-}\right)^2$ – на рівнях $y=0$ й $y=-h$. Проте цей вираз *не дає змоги* визначити поле $u(x,h)$, просто продовживши $u(x)$ на рівень $y=h>0$. Адже пряма $y=h$ розтинає тяжіючі маси надвоє і одна з частин при $\zeta(x)\le h$ буде *нижча* рівня $y=h$. Наслідком цього геометричного факту є те, що функція $u(x,y)$ при $y<h$ – негармонічна.

Розв'язання задачі. Однак знайти наближення $\zeta(x,h)$ можна не прямо за виразом (2), а опосередковано – як межу послідовності $\{\zeta_n(x,h)\}$ розв'язків, які отримують за допомогою процесу ітерацій типу Андрєєва

$$\zeta_{n+1}(x,h)=\zeta_n(x,h)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\zeta_n(\xi,x)d\xi+$$
$$+v(x),\ \zeta_0(x,h)\equiv v(x)=u(x)-h,\ n=0,\infty \quad (3)$$

з наступною регуляризацією за принципом Лаврентьєва (цього цілком достатньо для отримання першого наближення). Доведено, що на класі $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ розв'язок нелінійної контактної задачі $\zeta(x)$ із точністю до $h^{-2}\left(h^{+}-h^{-}\right)^2$ при $h\to\infty$ обчислюється за допомогою такого лінеаризованого виразу

$$\zeta^{(n)}(x,h)=\zeta(x)-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}C_{n+2}^{k+1}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{kh}{(kh)^2+(\xi-x)^2}\eta(\xi,x)d\xi . \quad (4)$$

З цієї формули, як окремі випадки при $n=0,1,2$, випливають відомі аналітичні конструкції [Нумеров, 1930], [Hughes, 1942] і [Страхов, 1976], де $\Delta u(\xi)=u(\xi,0)-u(x,0)$:

$$\zeta^{(0)}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\Delta u(\xi)d\xi, \quad (5)$$

$$\zeta^{(1)}(x,h)=u(x)- \quad (6)$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{3h}{h^2+(\xi-x)^2}-\frac{2h}{(2h)^2+(\xi-x)^2}\right\}\Delta u(\xi)d\xi,$$

$$\zeta^{(2)}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{6\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}-\right. \quad (7)$$

$$\left.-4\frac{2h}{(2h)^2+(\xi-x)^2}+\frac{3h}{(3h)^2+(\xi-x)^2}\right\}\Delta u(\xi)d\xi,$$

Цікаво, що формули (4) та (6), (7) при $n\geq 3$ неефективні для обчислення наближень контакту – через наростання з номером ітерації похибок округлень, особливо при обчисленні в околі точки $\xi=x$. Виявлено, що цей ефект прогресії похибок не властивий для виразу (5).

Щоб уникнути такого небажаного накопичення похибок, вдаємось до обхідного маневру – ядра інтегралів підсумовуємо з різними знаками у напрямку зростання біномних коефіцієнтів. Практика обчислень на простих чисельних моделях виявила, що підсумування елементарних дробів у ядрах перетворень з індексами $n>0$ за схемою (4) визначає додатні ядра перетворень лише при $n=1,2,3$, а при $n=4$ – уже від'ємні, що свідчить про розбіжність відповідних інтегральних квадратур.

Тому за результатами чисельного моделювання виявлено, що для практичних обчислень наближень (4) контакту $\zeta^{(n)}(x,h)$ достатньо узяти за "нульове наближення" вираз (5) і обмежитись однією з формул:

$$\zeta^{(1)}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left[10h^2+(\xi-x)^2\right]h}{\left[h^2+(\xi-x)^2\right]\left[(2h)^2+(\xi-x)^2\right]}\cdot\times\Delta u(\xi)d\xi,$$

$$\zeta^{(2)}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left[156h^4+13h^2(\xi-x)^2+(\xi-x)^4\right]h}{\left[h^2+(\xi-x)^2\right]\left[(2h)^2+(\xi-x)^2\right]\left[(3h)^2+(\xi-x)^2\right]}\Delta u(\xi)d\xi, \quad (8)$$

$$\zeta^{(3)}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left[3696h^6+124h^4(\xi-x)^2++29h^2(\xi-x)^4+(\xi-x)^6\right]h}{\left[h^2+(\xi-x)^2\right]\left[(2h)^2+(\xi-x)^2\right]\left[(3h)^2+(\xi-x)^2\right]\left[(4h)^2+(\xi-x)^2\right]}\Delta u(\xi)d\xi.$$

Вибір детальності обчислення наближення залежить від характеру вхідного поля $u(x)$ і масштабу побудов (міри задачі). Слід зазначити справедливість вказаних вище конструкцій лише для областей малої міри (≤ 100 км^2) і нескладної геометрії.

Уточнення моделі контакту. Наближення (4) $\zeta^{(n)}(x,h)$ можна істотно уточнити за допомогою ряду поправок, які є аналітичними апроксимаціями шуканого контакту різної міри детальності на зазначеному класі $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ шуканих розв'язків.

Наприклад, поправка, яка має конструкцію $\zeta_1^{(n)}(x,h)=\zeta^{(n)}(x,h)+\Delta\zeta(x,h)$, де

$$\Delta\zeta(x,h)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h^2-(\xi-x)^2}{\left[h^2+(\xi-x)^2\right]^2}\left[u(\xi,h)-u(x,h)\right]d\xi, \quad (9)$$

підвищує точність наближень до $h^{-3}\omega^3(\xi)$. Одначе, чисельне моделювання виявило, що в умовах слабоградієнтного поля достатньо дати поправку спрощеного вигляду

$$\Delta\tilde{\zeta}(x,h)=u(\xi_0)\frac{\partial u(x,-h)}{\partial y}, \quad (10)$$

де $u(\xi_0)$ – деяке "середнє" (осереднене засобами фільтрації) значення поля на поверхні спостережень.

Можна також уточнити наближення $\zeta^{(n)}(x,h)$ контакту поправкою виду

$$\zeta_1^{(k)}(x,h)=\sqrt{\left[\zeta^{(k)}(x,h)\right]^2+\Delta\zeta(x)},$$

$k=0,1,2,3\ldots$, яка є розв`язком лінійного інтегрального рівняння 1-го роду

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Delta\zeta(\xi)}{\left[\zeta^{(n)}(x,h)\right]^2+(\xi-x)^2}d\xi=v(x),$$

$$v(x)=u(x)-\zeta^{(k)}(x,h)+$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{\left[\zeta^{(k)}(x,h)\right]^2+(\xi-x)^2}{\left[\zeta^{(k)}(\xi,h)\right]^2+(\xi-x)^2}d\xi. \quad (11)$$

Точність наближень $\zeta^{(n)}(x,h)$ підвищується до міри $\Delta\zeta_0^2(h^+)^{-3}$, $\zeta_0=\max_x|\Delta\zeta(x)|$.

Ця поправка (11) допускає узагальнення у вигляді чисельної конструкції $\zeta_{n+1}(x)=\zeta_n(x)+\Delta\zeta_n(x)$, де $\Delta\zeta_n(x)=\lim_{m\to\infty}\Delta\zeta_n^{(m)}(x)$ отримують як ряд послідовних наближень за допомогою ітераційного процесу:

$$\zeta_0(x)=\zeta^{(k)}(x,h),\ k=0,1,2,3\ldots,\ h^-\leq h\leq h^+,$$

$$\Delta\zeta_n^{(m+1)}(x)=u(x)-\zeta_n(x)+$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+\zeta_n^2(x)}{(\xi-x)^2+\zeta_n^2(\xi)}d\xi-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\Delta\zeta_n^{(m)}(\xi)d\xi+\Delta\zeta_n^{(m)}(x),$$

$$m=\overline{0,\infty},\ n=\overline{0,\infty} \quad (12)$$

Висновки. Відтак, отримано ряд аналітичних конструкцій (8-12), застосування яких щодо відомих раніше апроксимаційних зображень контакту (4-7) на порядок підвищує точність їх обчислення. Доведено, що на класі $Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ послідовні наближення (8-9) і (11-12) є однозначними і стійкими (збіжними). Чисельно кожен спосіб зводиться до розв`язання лінійного інтегрального рівняння Фредгольма 1-го роду з ядром типу Пуассона. У перспективі очікується аналіз точності запропонованих конструкцій відносно відомих методів [Гравиразведка.., 1981] та апробація на польових даних.

Литература

Страхов В.Н. Смена парадигмы в теории линейных некорректных задач. – Москва, 2001.

Страхов В.Н. Об эффективных по быстродействию и точности методах построения линейных аналитических аппроксимаций в геофизике, геоинформатике и гравиметрии // Геофиз. журн. – 2007. – **29**, № 1.

Нумеров Б.В. Интерпретация гравитационных наблюдений в случае одной контактной поверхности // ДАН СССР. – 1930. – №21. – С. 569–574.

Старостенко В.И., Черная Н.Н., Черный А.В. Условия существования решения обратной задачи теории потенциала для контактной поверхности // Докл. АН УССР. Сер. Б. – 1988. – № 6. – С. 30-33

Hughes D. The analitic basis of gravity interpretation // Geophys. – 1942. – 7, № 2. – P. 169–178.

Страхов В.Н. Об интегральных и функциональных уравнениях некоторых обратных задач теории логарифмического потенциала и их значении для интерпретации гравитационных и магнитных аномалий // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. – 1976. – №3. – С. 54–66.

Гравиразведка. Справочник геофизика / Под ред. *Е.А. Мудрецовой*. – Москва: Недра, 1981. – 400 с.

НЕКОТОРЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОНТАКТА

Ю.И. Дубовенко

Указан способ замены нелинейной контактной задачи гравиметрии линейной. Дано аналитическое выражение для ее решения с приемлемой точностью. Выявлено, что известные аналитические конструкции для вычисления плотностных контактов есть его частными случаями. Наводится ряд итерационных поправок для уточнения приближений, каковые являются аналитическими аппроксимациями искомого контакта. Указана мера уточнения этих приближений.

Ключевые слова: гравиметрия; обратная задача; аналитическая аппроксимация; класс Нумерова; начальное приближение контакта; линейная контактная задача; итерационная поправка; численная модель.

CERTAIN ANALYTICAL APPROXIMATIONS FOR APPROPRIATE DENSITY INTERFACE DEFINITION

Yu.I. Dubovenko

A technique for substitution of nonlinear density interface problem of gravimetry with linear one is pointed out. An analytical expression for its solution with reasonable accuracy is given. There is detected that known analytical constructions for the density interfaces definition are the partial cases of the solution. A series of iteration corrections for the approximations specification are presented, which are the analytical approximations of required interface. The measure of specification for these approximations is pointed out.

Key words: gravimetry; inversion; analytical approximation; Numerov class; initial contact estimate; linear contact problem; iteration correction; numerical model.

Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України, м. Київ
Надійшла 01.10.2013